Olimpiada Națională de Matematică -etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a V-a

SUBIECTE:

1. Se consideră numerele naturale x, z, y astfel încât $9 \cdot x - 5 = 13 \cdot y + 4 \cdot z$.

Determinați restul împărțirii sumei x + z la 13 și restul împărțirii sumei z + y la 9.

2. Scrieți numărul $S = (1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + 100 \cdot 101) - 5050$ ca sumă de pătrate de numere naturale.

3. Determinați valorile naturale ale lui n și cifra nenulă x pentru care are loc relația:

$$3^{n+6} + 3^{n+5} + 3^{n+4} + 2 \cdot 3^{n+3} + 4 \cdot 3^n = \overline{xxxx}$$

4. Se consideră mulțimea $A = \{x^3 + y^3 \,/\, x, y \in N^*, x \neq y\}$

a) Verificați dacă $28^{28} \in A$ și $1792^{1792} \in A$.

b) Demonstrați că A conține o infinitate de elemente de forma n^n cu n număr natural nenul.

GM1/2012

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte
Timp de lucru 2 ore.

Olimpiada Națională de Matematică- etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a V-a

BAREM de CORECTARE si NOTARE:

1.Rezolvarea subiectului 7p

2.

$S = 1 \cdot (1 + 1) + 2 \cdot (2 + 1) + 3 \cdot (3 + 1) + ... + 100 \cdot (100 + 1) - 5050$ 2p

$S = 1^2 + 1 + 2^2 + 2 + 3^2 + 3 + ... + 100^2 + 100 - 5050$ 1p

$S = (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2) + (1 + 2 + 3 + ... + 100) - 5050$ 1p

$S = (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2) + 5050 - 5050$ 2p

$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 100^2$ 1p

3. $3^n (3^6 + 3^5 + 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 4) = 1111x$ 1p

$3^n \cdot 1111 = 1111x$ 1p

$3^n = x$, x cifră 2p

Avem următoarele posibilități:

$x = 1$, n = 0 ..... 1p

$x = 3$, n = 1 ..... 1p

$x = 9$, n = 2 ..... 1p

4. a) $28^{28} = 28^{27} \cdot 28 = 28^{27} \cdot (27 + 1) = 28^{27} \cdot (3^3 + 1)$ 1p

$28^{28} = (28^9 \cdot 3)^3 + (28^9 \cdot 1)^3 \Rightarrow 28^{28} \in A$ 1p

$1792^{1792} = 1792^{1791} \cdot 1792 = 1792^{1791} \cdot (12^3 + 4^3)$ 1p

$1792^{1792} = (1792^{597} \cdot 12)^3 + (1792^{597} \cdot 4)^3 \Rightarrow 1792^{1792} \in A$ 1p

b) Considerăm

$$n = M_3^3 + 1 = (3k)^3 + 1$$ 1p

Vom avea:

$$n^n = [(3k)^3 + 1]^{(3k)^3} \cdot [(3k)^3 + 1]$$

$$n^n = \{[(3k)^3 + 1]^{9k^3} \cdot 3k\}^3 + \{[(3k)^3 + 1]^{9k^3}\}^3$$ 1p

Cum k este număr natural, deducem că există o infinitate de numere $n^n \in A$. 1p

Notă:
Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Olimpiada Națională de Matematică- etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a VI-a

SUBIECTE:

1. Fie a și b numere naturale mai mici decât 100, $a < b$. Aflaţi cele două numere știind că c.m.m.d.c. al lor este număr prim, de 15 ori mai mic decât c.m.m.m.c. al acelorași numere.

2.a) Arătaţi că $\frac{3}{n(n+3)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}, n \in N^*$;

b) Calculaţi suma $s = \frac{7}{1\cdot 4} + \frac{31}{4\cdot 7} + \frac{73}{7\cdot 10} + ... + \frac{9703}{97\cdot 100}$.

c) Demonstraţi că $\frac{1}{15} < \frac{1}{4^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + ... + \frac{1}{100^2} < \frac{1}{3}$

3.Se dau unghiurile neadiacente suplementare <AOB şi <AOC. Măsura suplementului <AOC reprezintă jumătate din măsura complementului <AOB.

a) Calculaţi m(<AOB);

b) Dacă [OD este bisectoarea <AOB şi [OE este bisectoarea <AOC, calculaţi m(<DOE);

c) Dacă [OM este o semidreaptă inclusă în exteriorul <AOC, m(<AOM)=90° şi [ON este bisectoarea <COM, demonstraţi că punctele B,O,N sunt coliniare.

4. Spunem despre o mulţime de numere naturale că are proprietatea P dacă orice element al ei are exact 4 divizori.

a) Scrieţi mulţimea cu proprietatea P formată din cele mai mici patru numere naturale de trei cifre.

b) Fie A o mulţime cu proprietatea P astfel încât $8 \in A$. Arătaţi că, orice elemente ar avea mulţimea A suma divizorilor acestor elemente nu poate fi 2014.

(Gazeta Matematică nr.11/2014)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte
Timp de lucru 2 ore.

Olimpiada Națională de Matematică- etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a VI-a

BAREM de CORECTARE si NOTARE:

1. Dacă notăm $(a,b)=p$, p = nr. prim, atunci $a=p\cdot x$, $b=p\cdot y$, $(x,y)=1$ și $x<y$. (1p)

$[a,b]=pxy$. Din $[a,b]=15\cdot(a,b)\Rightarrow pxy=15p\Rightarrow x\cdot y=15$. (1p)

Deoarece $(x,y)=1$ și $x<y$ rezultă $x=1,y=15$ sau $x=3,y=5$. (1p)

Cazul I.Pentru $x=1,y=15\Rightarrow a=p,b=15p$, $p\in\{2,3,5\}$,obţinam soluţiile

$(a,b)\in\{(2,30),(3,45),(5,75)\}$. (2p)

Cazul II. Pentru $x=3,y=5\Rightarrow a=3p,b=5p,p\in\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$, obţinem

soluţiile $(a,b)\in\{6,10).(9,15),(15,25),(21,35),(33,55),(39,65),(51,85),(57,95)\}$ (2p)

2. a) $\frac{3}{n(n+3)}=\frac{(n+3)-n}{n(n+3)}=\frac{(n+3)}{n(n+3)}-\frac{n}{n(n+3)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}$ (2p)

b) $s=1+\frac{3}{1\cdot4}+1+\frac{3}{4\cdot7}+1+\frac{3}{7\cdot10}+...+1+\frac{3}{97\cdot100}=$ (1p)

$=33+\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+...+\frac{1}{97}-\frac{1}{100}=33+\frac{99}{100}=33\frac{99}{100}$ (1p)

c) $\frac{1}{15}<\frac{1}{4^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{10^2}+...+\frac{1}{100^2}<\frac{1}{3}/\cdot3\Leftrightarrow\frac{1}{5}<\frac{3}{4^2}+\frac{3}{7^2}+\frac{3}{10^2}+...+\frac{3}{100^2}<1$ (1p)

$\frac{3}{4^2}+\frac{3}{7^2}+\frac{3}{10^2}+...+\frac{3}{100^2}<\frac{3}{1\cdot4}+\frac{3}{4\cdot7}+\frac{3}{7\cdot10}+...+\frac{3}{97\cdot100}=$

$=\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+...+\frac{1}{97}-\frac{1}{100}<1$ (1p)

$\frac{3}{4^2}+\frac{3}{7^2}+\frac{3}{10^2}+...+\frac{3}{100^2}>\frac{3}{4\cdot7}+\frac{3}{7\cdot10}+\frac{3}{10\cdot13}+...+\frac{3}{100\cdot103}=$

$=\frac{1}{4}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{13}+...+\frac{1}{100}-\frac{1}{103}=\frac{1}{4}-\frac{1}{103}=\frac{99}{412}>\frac{1}{5}$ (1p)

3. a) m(<AOB)= 30° (2p)

b) m(<DOE)= 60° (2p)

c) Demonstrează că m(<BON)= $180^\circ\Rightarrow$ B, O, N coliniare. (3p)

4. a) $M=\{106,111,115,118\}$ (2p)

b) Fie $x\in A$ și $x=d_1^{\alpha_1}\cdot d_2^{\alpha_2}\cdot d_3^{\alpha_3}\cdot...$ descompunerea în factori primi. Deoarece x are 4 divizori avem relaţia $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)....=4$. (1p)

Cazul I. $\alpha_1+1=4 \quad \alpha_1=3$

$\alpha_2+1=1 \Rightarrow \alpha_2=0 \Rightarrow x=d_1^3=d^3$ (1p)

$\alpha_3+1=1 \quad \alpha_3=0$

.....

Cazul II. $\alpha_1+1=2 \quad \alpha_1=1$

$\alpha_2+1=2 \Rightarrow \alpha_2=1 \Rightarrow x=d_{1.}\cdot d_2$ (1p)

$\alpha_3+1=1 \quad \alpha_3=0$

.....

Notăm $s(x)$ suma divizorilor nr. $x \Rightarrow s(8)=1+2+4+8=15$

Dacă $x\in A$, $x\neq 8 \Rightarrow x=d^3$, d nr. prim diferit de 2 sau $x=d_{1.}\cdot d_2$ unde d_1,d_2 sunt numere prime.

Pentru $x=d^3 \Rightarrow s(x)=1+d+d^2+d^3=(1+d)(1+d^2)$ =nr. par. (1p)

Pentru $x=d_{1.}\cdot d_2 \Rightarrow s(x)=1+d_1+d_2+d_1\cdot d_2=(1+d_1)(1+d_2)$ =nr. par.

Suma divizorilor elementelor mulţimii A este nr. impar, deci este diferită de 2014. (1p)

Observaţie: Dacă elevul precizează că $x=d^3$ sau $x=d_{1.}\cdot d_2$ unde d,d_1,d_2 sunt numere prime și nu demonstrează, se acordă 1p.

Notă:

Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

Olimpiada Națională de Matematică-etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a VII-a

SUBIECTE:

1. Arătați că:

a) $\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$, oricare ar fi n ∈ N*.

b) $\frac{2013}{1\cdot 2}+\frac{2012}{2\cdot 3}+\frac{2011}{3\cdot 4}+...+\frac{2}{2012\cdot 2013}+\frac{1}{2013\cdot 2014}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{2013}{2014}$

Supliment GM3/2014

2. Aflați numărul natural $\overline{abc}$, scris în baza 10, știind că:

$$10\cdot\left(\frac{\overline{ab}}{c}-1\right)+\frac{\overline{bc}}{a}=82$$

GM4/2011

3. Printr-un punct variabil D situat pe latura BC a triunghiului oarecare ABC se duce o paralelă la mediana AM, M ∈ (BC). Paralela intersectează dreptele AB, respectiv AC în E, respectiv F. Arătați că:

a) $\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}$;

b) DE + DF este constant.

Supliment GM3/2014

4. Fie M un punct în interiorul triunghiului ΔABC astfel încât $\angle ABM\equiv\angle ACM$. Dacă P și Q sunt proiecțiile lui M pe AB, respectiv AC și E este mijlocul lui $[BC]$, arătați că $[EP]\equiv[EQ]$

GM10/2011

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte
Timp de lucru 3 ore.

Olimpiada Națională de Matematică-etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a VII-a

BAREM de CORECTARE si NOTARE:

1. a) $\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{n+1}{n+1}-\frac{1}{n+1}-\frac{n}{n}+\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n+1}-1+\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ 1p

$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n(n+1)}$ 1p

b) $\frac{2013}{1\cdot 2}+\frac{2012}{2\cdot 3}+\frac{2011}{3\cdot 4}+...+\frac{2}{2012\cdot 2013}+\frac{1}{2013\cdot 2014}=$

$=2013\cdot\frac{1}{1\cdot 2}+2012\cdot\frac{1}{2\cdot 3}+2011\cdot\frac{1}{3\cdot 4}+...+2\cdot\frac{1}{2012\cdot 2013}+\frac{1}{2013\cdot 2014}=$ 1p

$=2013\left(\frac{1}{2}-\frac{0}{1}\right)+2012\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)+2011\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\right)+...+2\left(\frac{2012}{2013}-\frac{2011}{2012}\right)+1\left(\frac{2013}{2014}-\frac{2012}{2013}\right)=$

.....2p

$=\frac{1}{2}(2013-2012)+\frac{2}{3}(2012-2011)+\frac{3}{4}(2011-2010)+...+\frac{2012}{2013}(2-1)+\frac{2013}{2014}=$ 1p

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+...+\frac{2013}{2014}$ 1p

Supliment GM3/2014

2. Relația devine $\frac{10\cdot\overline{ab}}{c}+\frac{\overline{bc}}{a}=92$ 2p

sau $\frac{\overline{ab0}}{c}+\frac{\overline{bc}}{a}=92$ 1p

De aici putem scrie $\frac{\overline{abc}}{c}-1+\frac{\overline{abc}}{a}-100=92$ ..... 1p De

unde $\overline{abc}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)=193$ sau $\overline{abc}(a+c)=193ac$ 1p

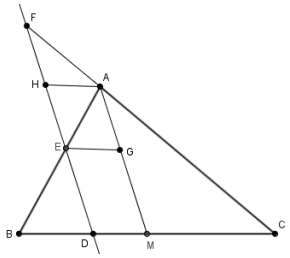
Cum 193 este număr prim avem 193 divide $\overline{abc}\Rightarrow\overline{abc}\in$ {193, 386, 579, 772, 965} 1p

Finalizare $\overline{abc}$ = 386 ..... 1p

GM4/2011

3. a) M mijlocul [BC] $\Rightarrow$ BM = MC

AM || DF $\overset{Th.Thales}{\Rightarrow} \frac{AF}{AC}=\frac{DM}{MC}$ 1p



DE || AM $\overset{Th.Thales}{\Rightarrow} \frac{AE}{AB}=\frac{DM}{MB}$ 1p

Finalizare $\frac{AF}{AC}=\frac{AE}{AB}$ 1p

b) Ducând EG || DM și AH || DM obținem paralelogramele DEGM și DHAM 1p

$\Rightarrow \frac{BD}{BM}=\frac{DE}{AM}=\frac{BE}{AB}$ și $\frac{CM}{CD}=\frac{AM}{DF}=\frac{AC}{FC}$ 1p

$DE+DF=\frac{BE\cdot AM}{AB}+\frac{FC\cdot AM}{AC}=AM\left(\frac{BE}{AB}+\frac{FC}{AC}\right)$ 1p

$DE+DF=AM\left(1-\frac{AE}{AB}+1+\frac{AF}{AC}\right)=2AM=ct.$ 1p

Supliment GM3/2014

4. Fie R mijlocul lui $[MB]$ și S mijlocul lui $[MC]$

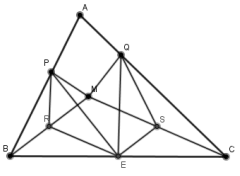
În ΔBPM dr., $[PR]$ este mediană $\Rightarrow PR=\frac{MB}{2}=MR=RB$ 1p

În ΔCQM dr , $[QS]$ este mediană $\Rightarrow QS=\frac{MC}{2}=SC=SM$ 1p

În ΔMBC, $[RE]$ este linie mijlocie $\Rightarrow$ RE || MC, $RE=\frac{MC}{2}$, adică *RE || MS, RE = MS*, deci

RESM paralelogram $\Rightarrow$ *RE = MS = SQ, SE = RM* = PR și $\angle MRE\equiv\angle MSE.$ 1p

Dacă $m(\angle ABM)=m(\angle ACM)=x\Rightarrow m(\angle PRM)=m(\angle QSM)=2x$ ... 1p



$m(\angle PRE)=2x+m(\angle MRE)=2x+m(\angle MSE)=m(\angle QSE)$ .. 1p

$\Delta PRE\equiv\Delta ESQ$ (L.U.L.) $\Rightarrow [EP]\equiv[EQ]$ 2p

GM10/2011

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Olimpiada Națională de Matematică- etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a VIII-a

SUBIECTE:

1. Demonstraţi că produsul a patru numere naturale consecutive nenule, poate fi scris ca diferenţa pătratelor a două numere naturale nenule.

2. a) Să se arate că oricare ar fi $n\in N$, $n\geq 1$, are loc inegalitatea:

$2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$.

b) Fie $S=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{2015}}$. Să se determine cel mai mare număr natural, mai mic sau egal decât $\frac{S}{10}$.

3. În cubul ABCDA'B'C'D' de latură $2a$ se consideră punctul S ∈ [CC']. Notăm {O} = BD ∩ AC şi {M} = SO ∩ A'C'. Dacă planele (A'BD) şi (MBD) sunt perpendiculare, stabiliţi poziţia punctului S pe CC'.
(Problema E:14526 din Gazeta matematică Nr. 6-7-8/2013 – enunţ modificat)

4. De aceeaşi parte a planului unui dreptunghi ABCD se ridică pe acesta perpendicularele AE şi DF. Se consideră punctul M pe latura (DC) astfel încât $\frac{DM}{DC}=\frac{1}{3}$. Ştiind că dreptele EM şi BF sunt concurente în punctul O, iar AD = 6 cm, AB = 9 cm, AE = 6 cm, DF = x cm, se cere:
a) Să se determine x;
b) Să se calculeze distanţa de la punctul A la planul (EBM).

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte
Timp de lucru 3 ore.

Olimpiada Națională de Matematică- etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a VIII-a

BAREM de CORECTARE si NOTARE:

1. Dacă a este număr natural nenul, atunci $a(a+1)(a+2)(a+3) = (a^2+3a)(a^2+3a+2) =$ 2p
$= (a^2+3a)^2 + 2(a^2+3a) =$ 1p
$= (a^2+3a)^2 + 2(a^2+3a) +1 - 1 =$ 2p
$= (a^2+3a+1)^2 - 1^2 =$ 1p
$= x^2 - y^2$, unde $x = a^2+3a+1$, $y = 1$, sunt numere natural nenule 1p

2. a) $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} - 2n < 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} < 1+2n \Leftrightarrow 4n^2+4n < 4n^2+4n+1,$

adevărat 3p
Analog inegalitatea a doua 1p

b) Se aplică inegalităţile de la puctul a) pentru $n \in \{1,2,...,2015\}$ şi după adunare se obţine:

$2(-1+\sqrt{2016}) < S < 2\sqrt{2015} \Leftrightarrow 87,7.. = 2(\sqrt{2016}-1) < S < 2\sqrt{2015} = 89,7.. \Leftrightarrow 8,7 < \frac{S}{10} < 8,9$ 2p

$\Rightarrow [\frac{S}{10}] = 8.$ 1p

3. (A'BD) $\cap$ (MBD) = BD; Δ A'BD este isoscel (A'D şi A'B sunt diagonale ale feţelor cubului),
O este mijlocul (BD) $\Rightarrow$ A'O $\perp$ BD, (1). 1p
Δ MBD este isoscel (Δ MA'B $\equiv \Delta$ MA'D) $\Rightarrow$ MO $\perp$ BD,(2). 1p
Din (1) şi (2) $\Rightarrow \sphericalangle$((A'BD),(MBD)) = $\sphericalangle$ A'OM. 1p

Din Δ OCS ~ Δ A'OA $\Rightarrow \frac{OC}{AA'} = \frac{SC}{AO} \Rightarrow \frac{a\sqrt{2}}{2a} = \frac{SC}{a\sqrt{2}} \Rightarrow$ SC = a 3p

$\Rightarrow$ S este mijlocul muchiei CC'. 1p

4. a) Fie planul α = (EBMF), $\alpha \cap$ (ABE) = EB, $\alpha \cap$ (FDC) = FM, (ABE) // (FDC) $\Rightarrow$
EB // FM 1p
Cum FD // EA şi AB // DM $\Rightarrow$ Δ FDM ~ Δ EAB $\Rightarrow$ 1p

$\frac{FD}{EA} = \frac{DM}{AB} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{3}{9} \Rightarrow x = 2$ 1p

b) Fie AT $\perp$ BM, cum EA $\perp$ (ABC) , utilizând teorema celor trei perpendiculare, rezultă
ET $\perp$ BM, fie AP $\perp$ ET $\Rightarrow$ AP $\perp$ (EBM) (R.2t.3p.) $\Rightarrow$ d(A, (EBM)) = AP 2p

Se calculează BM = $6\sqrt{2}$ cm, AT = $\frac{2 \cdot A_{AMB}}{MB} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$, ET = $\frac{3}{2}\sqrt{34}$, AP = $\frac{AE \cdot AT}{ET} = \frac{18\sqrt{17}}{17}$,

deci d(A, (EBM)) = $\frac{18\sqrt{17}}{17}$ cm. 2p

Notă: Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

Olimpiada Națională de Matematică -etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a IX-a

SUBIECTE:

1. a) Să se demonstreze că triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ au acelaşi centru de greutate dacă şi numai dacă $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$
   b) În planul triunghiului ABC se consideră punctele M, N, P astfel încât $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{PA}$. Fie G_1,G_2,G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor AMP, BNM, CPN. Să se demonstreze că triunghiurile ABC şi $G_1G_2G_3$ au acelaşi centru de greutate.

2. Fie $n\in N, n\geq 2$ şi $a_1\leq a_2\leq ...\leq a_n$ numere reale. Să se determine minimul expresiei $E(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+...+|x-a_n|$, $x\in R$

***

3. Fie $n\in N$ şi $a,b\in Q$ astfel încât $a^{2n+1}+b^{2n+1}=2a^nb^n$. Să se arate că $1-ab$ este pătratul unui număr raţional.

4. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale sistemul:

$$\begin{cases} x+d(y)=6{,}5 \\ y+d(x)=2{,}1 \end{cases}$$

unde $d(x)=\min\limits_{k\in Z}|x-k|$

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte
Timp de lucru 3 ore.

Olimpiada de Matematică- etapa locală
15 februarie 2015-PITEŞTI
Clasa a IX-a

BAREM de CORECTARE si NOTARE:

1. a) Fie G, G' centrele de greutate ale celor două triunghiuri şi O un punct din plan.

Avem: $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$, $\overrightarrow{OG'}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}\right)$, ... (2 p)

$G'=G \Leftrightarrow \overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OC'}=\vec{0}$,

$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$, ... (2 p)

b) $\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{BG_2}+\overrightarrow{CG_3}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{BM}\right)=\vec{0}$, ... (3 p)

2. Pentru $a,b\in R$, $a\le b$, avem $|x-a|+|x-b|\ge b-a$, cu egalitate pentru $x\in[a,b]$,(1)

..... (2 p)

i)Dacă $n=2k$, folosind (1) obţinem:

$|x-a_1|+|x-a_{2k}|\ge a_{2k}-a_1$, $|x-a_2|+|x-a_{2k-1}|\ge a_{2k-1}-a_2$, ş.a.m.d.

Se obţine $\min(E(x))=a_{2k}+a_{2k-1}+...+a_{k+1}-a_k-a_{k-1}-...-a_1$, atins pentru $x\in[a_k,a_{k+1}]$,

..... (2 p)

Ii)Dacă $n=2k+1$, folosind (1) avem: $E(x)\ge a_{2k+1}+a_{2k}+...+a_{k+2}-a_k-a_{k-1}-...-a_1+|x-a_{k+1}|$ şi

$\min(E(x))=a_{2k+1}+a_{2k}+...+a_{k+2}-a_k-a_{k-1}-...-a_1$, atins pentru $x=a_{k+1}$, ... (3 p)

Obs. $a_{k+1}\in[a_k,a_{k+2}]$

3. Ridicând la pătrat relaţia din enunţ, obţinem:

$a^{4n+2}+b^{4n+2}+2a^{2n+1}b^{2n+1}=4a^{2n}b^{2n}$, (1) , ... (2 p)

Prelucrând (1), găsim:

$a^{4n+2}+b^{4n+2}-2a^{2n+1}b^{2n+1}=4a^{2n}b^{2n}-4a^{2n+1}b^{2n+1}$, $\left(a^{2n+1}-b^{2n+1}\right)^2=4a^{2n}b^{2n}(1-ab)$, ... (3 p)

Dacă $ab=0$, cerinţa este îndeplinită, ... (1 p)

Pentru $ab\ne 0$, $1-ab=\left(\frac{a^{2n+1}-b^{2n+1}}{2a^nb^n}\right)^2=q^2$, $q\in Q$, ... (1 p)

4. Se disding cazurile

i) $\{x\},\{y\}\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$, sistemul devine: $\begin{cases}x+\{y\}=6,5\\ y+\{x\}=2,1\end{cases}$

Prin scăderea celor două ecuaţii obţinem $[x]-[y]=4,4$, ecuaţia nu are soluţii, ...(2 p)

ii) $\{x\}\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$, $\{y\}\in\left[\frac{1}{2},1\right)$, sistemul devine: $\begin{cases}x+1-\{y\}=6,5\\ y+\{x\}=2,1\end{cases}$.

Prin adunarea celor două ecuaţii obţinem $[x]+[y]+2\{x\}=7,6$.

Rezultă: $\{x\}=0,3$, $y=1,8$, $x=6,3$, ... (2 p)

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Piteşti, Jud. Argeş,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, Bucureşti
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

iii) $\{x\}\in\left[\frac{1}{2},1\right)$, $\{y\}\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$, sistemul devine:

$$\begin{cases} x+\{y\}=6,5 \\ y+1-\{x\}=2,1 \end{cases}.$$

Prin adunarea celor două ecuaţii obţinem $[x]+[y]+2\{y\}=7,6$.

Rezultă: $\{y\}=0,3$, $x=6,2$, contradicţie cu $\{x\}\in\left[\frac{1}{2},1\right)$, ecuaţia nu are soluţii, ... (2 p)

iv) $\{x\}\in\left[\frac{1}{2},1\right)$, $\{y\}\in\left[\frac{1}{2},1\right)$, sistemul devine: $\begin{cases} x+1-\{y\}=6,5 \\ y+1-\{x\}=2,1 \end{cases}$.

Prin adunarea celor două ecuaţii obţinem $[x]+[y]=6,6$, ecuaţia nu are soluţii,..... (1 p)

Soluţia sistemului este: $\begin{cases} x=6,3 \\ y=1,8 \end{cases}$

Notă:

Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

Olimpiada Națională de Matematică -etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a X-a

SUBIECTE:

1. Se considera numerele a, b, c, d astfel incât $a > c > b > 0$ si $ab = cd$.
   Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $a^x - b^x \geq c^x + d^x$.

2. Să se rezolve ecuația $(3^x + 2)^{\log_5 3} + 2 = (5^x - 2)^{\log_5 5}$.

   G.M. 6-7-8/2014

3. Se consideră numerele complexe a, b, c distincte două câte două și de module egale astfel incât
   $|a - b| \cdot (a + b) + |b - c| \cdot (b + c) + |c - a| \cdot (c + a) = 0$
   Demonstrați că a, b, c sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral .

4. Determinați numerele $a, b, c > 0$ cu proprietatea că
   $a^{\log_5 a} \cdot b + b^{\log_5 b} \cdot c - c^{\log_5 c} \cdot a = \sqrt[4]{27}$.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte
Timp de lucru 3 ore.

Olimpiada Națională de Matematică- etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a X-a

BAREM de CORECTARE si NOTARE:

1. $a^x+b^x-c^x-\left(\frac{a\cdot b}{c}\right)^x\geq 0$.....**1 p**

$c^x\left[\left(\frac{a}{c}\right)^x+\left(\frac{b}{c}\right)^x-1-\left(\frac{a\cdot b}{c\cdot c}\right)^x\right]\geq 0$.....**1 p**

$\left(\left(\frac{a}{c}\right)^x-1\right)\left(1-\left(\frac{b}{c}\right)^x\right)\geq 0\Leftrightarrow\left(\frac{a}{c}\right)^x-1$ *si* $1-\left(\frac{b}{c}\right)^x$ au același semn.....**3 p**

Cum $\frac{a}{c}>1$ *și* $\frac{b}{c}<1$ se consideră cazurile $x\geq 0$ *si* $x<0$ si

problema este rezolvată..... **2p**

2. Ecuația se scrie $\log_5(3^x+2)+2=5^{\log_5(5^x-2)}$.....**1p**

Notăm $\log_5(3^x+2)=a,\ \log_3(5^x-2)=b$ și obținem sistemul de ecuații

$3^x+2=5^a, 3^b+2=5^x, 3^a-2=5^b$.....**2p**

Dacă $x>a\Rightarrow 3^x+2>3^a+2\Rightarrow 5^a>5^b\Rightarrow a>b\Rightarrow$

$\Rightarrow 3^a+2>3^b+2\Rightarrow 5^b>5^x\Rightarrow b>x$ contradicție

Si analog dacă $x<a$.....**2p**

Se obține $x=a$ *si analog* $x=b$, de unde $3^x+2=5^x$

Cu soluție unică $x=1$..... **2p**

3. Relația din ipoteză se scrie $:(a+b+c)(|a-b|+|b-c|+|c-a|)-(c\cdot|a-b|+a\cdot|b-c|+b\cdot|c-a|)=0$.....

.....**4p**

Impărțind prin $|a-b|+|b-c|+|c-a|$ se obține $Z_H-Z_I=0$.....**1p**

Atunci $I=H\Rightarrow$ *triunghiul ABC este echilateral*.....**2p**

4. Notăm:

$\log_3 a=x,\log_3 b=y,\log_3 c=z\Rightarrow 3^{x^2+y}+3^{y^2+z}+3^{z^2+x}=\sqrt[4]{27}$.....**1p**

Cu inegalitatea mediilor $\sqrt[4]{27}\geq 3\sqrt[8]{3^{x^2-y^2+z^2+x+y+z}}$.....**2p**

Obținem $\frac{3}{4}\geq\frac{3+x^2+y^2+z^2+x+y+z}{3}$.....**1p**

De unde se obține $(2x+1)^2+(2y+1)^2+(2z+1)^2\leq 0\Rightarrow$

$x=y=z=-\frac{1}{2}$.....**2p**

Finalizare $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ **1p**

Notă:

Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.

Olimpiada Națională de Matematică -etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a XI-a

SUBIECTE:

Subiectul 1. Fie marticile $A,B,C,D \in M_n(C)$ a.î. $A^3= -BCD$, $B^3= -CDA$,$C^3= -DAB$, $D^3= -ABC$

a) Să se arate că $A^4 = B^4 = C^4 = D^4$

b) Să se dea un exemplu de matrici A,B,C,D care verifică simultan condițiile din ipoteză

Subiectul 2. Să se arate că dacă șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ verifică relația :

$(n + 2) x_{n+2} – (n+3) x_{n+1} + x_n = 0$, $\forall\, n\geq 0$, atunci el este convergent și calculați limita lui.

Subiectul 3. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = a.A^3 + x.A^2 +(a-x).A$

Să se arate că $a.\det B \geq 0$,$\forall$ a , x $\in \mathbf{R}$

Subiectul 4. Fie A o matrice de ordinul doi cu elemente reale și A^t matricea transpusă. Știind că $\det (A+A^t) = 8$ și $\det (A+2A^t) = 27$. Să se calculeze det A

G.M. nr 11 / 2014

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte
Timp de lucru 3 ore.

Olimpiada Națională de Matematică- etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a XI-a

BAREM de CORECTARE si NOTARE:

Sbiectul 1. a) $A^4 = A^3A = (-BCD)A = B(-CDA) = BB^3 = B^4$ 1p

$C^4 = CC^3 = C(-DAB) = (-CDA)B = B^3B = B^4$ 1p

$D^4 = DD^3 = D(-ABC) = (-DAB)C = C^3C = C^4$ 1p

Finalizare $A^4 = B^4 = C^4 = D^4$ 1p

b) A , -A , iA , -iA ($i^4=1$) și verificările 3p

Subiectul 2. Relația se mai poate scrie : $(n+2)(x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) = 0$ 1p

Notează $y_n = x_{n+1} - x_n \Rightarrow y_{n+1} = \frac{1}{n+2} y_n$ 1p

$y_n = \frac{1}{(n+1)!} y_0$ 1p

$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)!}(x_1 - x_0)$ 1p

$x_n = x_0 + (\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!})(x_1 - x_0)$ 1p

$E_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$, $E_n \to e \Rightarrow \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \to e - 1$ 1p

Finalizare $x_n \to x_0 + (e-1)(x_1 - x_0)$ 1p

Subiectul 3. Calculează $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = I_3$ 2p

obține $B = \begin{pmatrix} a & x & a-x \\ a-x & a & x \\ x & a-x & a \end{pmatrix}$ 1p

$\det B = 2a(3x^2 - 3ax + a^2)$ 1p

$a \det B = 2a^2(3x^2 - 3ax + a^2)$ 1p

$3x^2 - 3ax + a^2 \geq 0$ ($\Delta = -3a^2 \leq 0$) 1p

Finalizare $2a^2(3x^2 - 3ax + a^2) \geq 0$ 1p

B-dul Eroilor nr. 4-6,
Pitești, Jud. Argeș,
Tel: +40 (0)248 218 319
Fax: +40 (0)248 219 743
www.isjarges.ro

Str. General Berthelot nr. 28-30,
Sector 1, 010168, București
Tel: +40 (0)21 405 57 06
Fax: +40 (0)21 310 32 05
www.edu.ro

Subiectul 4. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^t=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $A+A^t=\begin{pmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{pmatrix}$ 1p

$\det(A+A^t)=4ad-b^2-2bc-c^2$ 1p

$A+2A^t=\begin{pmatrix} 3a & b+2c \\ c+2b & 3d \end{pmatrix}$ 1p

$\det(A+2A^t)=9ad-2b^2-5bc-2c^2$ 1p

$\begin{cases} 4ad-b^2-2bc-c^2=8 \\ 9ad-2b^2-5bc-2c^2=27 \end{cases}$ 1p

Finalizare $ad-bc=11$, deci $\det A=11$ 2p

Notă:

Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.

Olimpiada Națională de Matematică -etapa locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a XII-a

SUBIECTE:

1.Să se calculeze $\int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+2015}dx$, x> 0.

2. Fie $(G,\bullet)$ un grup cu elementul neutru e si H un subgrup propriu al lui G.
i) Dacă $a \in G \setminus H$, notam $aH = \{ah \mid h \in H\}$. Demonstrați că $H \cap aH = \emptyset$.
ii) Dacă G este comutativ si $a \in G \setminus H$ satisface $a^2 = e$, atunci $K = H \cup aH$ este subgrup al lui G.

G.M. 1986

3. a) Să se calculeze $\int_{-1}^{1} \frac{4^x + 1}{3^x + 2^x}dx$

b) Se consideră numerele reale a si b şi funcția continuă $f : R \to R$ cu proprietatea că
$\int_{at}^{bt} f(x)dx \le \int_{a}^{b} f(x)dx$, oricare ar fi $t \in (0,2)$. Să se arate că $af(a) = bf(b)$.

GM 10/2014

4. Fie $(A,+,\bullet)$ un inel cu proprietatea că $x^2 = x$, $(\forall)x \in A$. Să se arate că :
a) $x + x = 0$, $(\forall)x \in A$ şi că A este inel comutativ;
b) dacă inelul nu are divizori ai lui zero,atunci el are cel mult două elemente.

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte
Timp de lucru 3 ore.

Olimpiada Națională de Matematică- etapa Locală
15 februarie 2015-PITEȘTI
Clasa a XII-a

BAREM de CORECTARE si NOTARE:

1. $I=\int \frac{2x+3}{x(x+1)(x+2)(x+3)+2015}dx=\int \frac{2x+3}{[x(x+3)][(x+1)(x+2)]+2015}dx$--------2p

$I=\int \frac{2x+3}{[x(x+3)][(x+1)(x+2)]+2015}dx=\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+1)^2+2014}dx$ ------ ----------2p

$I=\int \frac{(x^2+3x+1)'}{(x^2+3x+1)^2+2014}dx$ ----------2p

Finalizare ----------1p

2. i.)----------3p

K nevidă----------1p ; K parte stabilă----------2p

Simetricul oricărui element din K este in K----------1p

3. a) Obținerea rezultatului $I=\frac{3\ln 2}{2}$ prin orice metodă corectă ----------4p

b) Dacă a=b , atunci egalitatea este evidentă.Dacă nu , atunci se

consideră funcției g :(0;2) →$\mathbb{R}$, g(t) = $\int_{at}^{bt} f(x)dx$ ----------1p

g(t)≤ g(1) (∀) t ∈ (0;2),deci t=1 este punct de maxim global al lui g----------1p

Aplicarea teoremei lui Fermat şi finalizare ----------1p

4**. a)** i) x+x = 0 (∀)x ∈ A ----------2p

ii) A inel comutativ (se face trecerea x→x+y in egalitatea din enunț, se obține xy= -yx (∀)x,y ∈A şi se aplică i)- ----------2p

b) xy(x+y)=$x^2y+xy^2=x^2y+x^2y$ =xy(x+y) =0 (∀) x,y∈ A----------1p

y=1 : x(x+1)=0 (∀)x∈A şi A n-are divizori ai lui zero , -------- ---------- ------ 1p

deci card (A)≤ 2 ---------- ---------- 1p

Notă:

Orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.